

Primera edición

Álgebra desde una perspectiva didáctica

ECOE EDICIONES

**Róbinson Castro Puche
Rubby Castro Puche**

Róbinson Castro Puche

Master of Arts Mathematics Education,
Ball State University, Muncie, Indiana,
USA. Licenciado en Matemáticas,
Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá.

Ha ejercido como secretario
académico de la Facultad de Ciencias,
director de la Oficina de Registro y
Admisiones, director del
Departamento de Matemáticas y
profesor titular de la Universidad de
Córdoba, Montería.

También, fue rector del Colegio El
Carmen de Cotorra, Córdoba y entre
diciembre de 1993 y noviembre de
1994 fue docente adscrito a la
Universidad Nacional de Colombia.

Rubby Castro Puche

Especialista en Diseño de Textos
Escolares, Universidad Externado de
Colombia, Bogotá. Especialista en
Administración Educativa, Universidad
San Buenaventura, Medellín. Máster en
Docencia, Universidad de la Salle,
Bogotá. Licenciada en Filosofía,
Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá.

Coordinadora Diplomado en Docencia
Universitaria, Universidad de Córdoba,
Montería.

Docente de tiempo completo, adscrita
al Departamento de Artes y
Humanidades, Universidad de
Córdoba, Montería.

ÁLGEBRA DESDE UNA PERSPECTIVA DIDÁCTICA

RÓBINSON CASTRO PUCHE

RUBBY CASTRO PUCHE

Índice general

| | |
|--|-----------|
| PRESENTACIÓN | v |
| PREFACIO | ix |
| 1. EL PENSAMIENTO FORMAL | 1 |
| 1.1. Las estructuras matemáticas | 14 |
| 1.2. Los factores pedagógicos | 19 |
| 2. LOS NÚMEROS ENTEROS | 23 |
| 2.1. Un modelo matemático para jugar fútbol | 24 |
| 2.2. Operaciones con los enteros | 28 |
| 2.2.1. El producto de enteros | 31 |
| 2.2.2. La división de enteros | 34 |
| 2.2.3. La recta numérica | 35 |
| 3. LOS NÚMEROS RACIONALES | 39 |
| 3.1. Modelos para representar los racionales | 39 |
| 3.2. El significado de número fraccionario | 44 |
| 3.3. Fracciones equivalentes | 45 |
| 3.4. Operaciones con los racionales | 50 |
| 3.5. Adición y sustracción | 50 |
| 3.6. El producto | 54 |
| 3.7. La división | 57 |
| 3.8. Propiedades de las operaciones | 60 |
| 3.9. Generalización de las operaciones | 65 |

| | |
|---|------------|
| 4. POLINOMIOS | 69 |
| 4.1. La suma de polinomios | 70 |
| 4.2. El producto | 71 |
| 4.3. La división | 76 |
| 4.4. Fracciones algebraicas | 76 |
| 4.5. Fracciones equivalentes | 78 |
| 4.6. Operaciones | 80 |
| 4.7. Cocientes notables | 81 |
| 4.8. Divisibilidad | 83 |
| 4.9. Raíces cuadradas | 84 |
| 4.9.1. Raíces enésimas | 86 |
| 5. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS | 89 |
| 5.1. El concepto de área | 90 |
| 5.2. Factorización | 93 |
| 6. LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS | 101 |
| 6.1. Las ecuaciones de segundo grado | 104 |
| 6.2. Sistemas de ecuaciones | 107 |
| 6.3. La sustitución de Vieta | 112 |
| 6.3.1. Solución de la ecuación de segundo grado | 113 |
| 6.3.2. Solución de la ecuación de tercer grado | 116 |
| 7. ITERACIÓN DE LAS OPERACIONES | 121 |
| 7.1. Progresiones aritméticas | 121 |
| 7.2. Suma de los términos | 123 |
| 7.3. Progresiones geométricas | 123 |
| 7.4. Exponentes | 124 |
| 7.5. Logaritmos | 131 |
| 8. LOS NÚMEROS COMPLEJOS | 137 |
| 8.1. La fórmula de Cardano | 139 |
| 8.2. Los complejos | 141 |
| 9. LA FORMULACIÓN DE PROBLEMAS | 145 |
| 9.1. Situaciones problémicas | 150 |
| 9.1.1. Situación problémica cuya solución lleva al estudio de la ecuación $ax + bx + c = d$ | 156 |

| | |
|--|------------|
| 9.1.2. Situación problémica cuya solución implica resolver la ecuación $x^2 + x - 12 = 0$ | 158 |
| 9.1.3. Situación problémica cuya solución implica plantear un sistema de ecuaciones | 161 |
| 9.1.4. Situación problémica cuya solución conduce al estudio de las progresiones geométricas | 163 |
| 9.2. Modelos para solucionar problemas | 166 |
| 9.2.1. La balanza matemática | 174 |
| 9.3. Estrategias | 178 |
| 9.4. El método científico | 185 |
| 10. ÁREAS | 191 |
| 10.0.1. El área del rectángulo | 192 |
| 10.0.2. El área del cuadrado | 192 |
| 10.0.3. El área del triángulo | 193 |
| 10.0.4. Área de triángulos oblicuángulos | 193 |
| 10.0.5. El área del paralelogramo | 195 |
| 10.0.6. El área del trapecio | 196 |
| 10.0.7. El área del rombo | 197 |
| 10.0.8. El teorema de Pitágoras | 198 |
| 10.1. La existencia de π | 200 |
| 10.1.1. Área del tronco de cono | 204 |

PRESENTACIÓN

Las matemáticas pueden ser apreciadas a través de la estética o de su aplicación. El primer punto de vista se basa en el deleite de la mente humana al apreciar esta ciencia como un cuerpo de conocimiento construido y sistematizado mediante el raciocinio, fundamentado en pruebas lógicas, que transitan entre lo simple y lo sofisticado, que no requieren experimentación y que provienen del mundo de las ideas. En segunda instancia, constituyen un conjunto de herramientas conceptuales, cuya aplicación ha sido útil para entender desde la estructura del espacio y del tiempo, hasta el diseño de sistemas de aprendizaje de máquina computarizados.

A parte de la belleza de los razonamientos matemáticos, la aplicación de esta ciencia formal ha revolucionado e influenciado de manera positiva la ingeniería y otras ciencias factuales como la física, la química y la biología. Por ende, es innegable la influencia significativa que las matemáticas han tenido en la civilización y la tecnología humana, de hecho, esta ciencia surgió a partir de problemas cotidianos provenientes del comercio, la agricultura y la arquitectura. Así mismo, en ámbito de la ingeniería y la tecnología, es relevante mencionar cómo los hermanos Wright superaron a sus predecesores, en la solución del problema de crear máquinas voladoras, mediante la aplicación de los modelos matemáticos de la aerodinámica, en vez de seguir imitando el diseño estructural de las aves.

A pesar de la evidente utilidad de las matemáticas, enseñar a usarlas para resolver problemas es un desafío pedagógico, y en este contexto, los libros escritos para la enseñanza de esta asignatura están orientados a comunicar reglas que regulan las operaciones y a fomentar el ejercicio repetitivo de su aplicación, con el fin de memorizarlas, sacrificando la reflexión y compren-

sión de su semántica, lo que conlleva a que los estudiantes sean incompetentes para formular problemas en términos matemáticos, y mucho más para encontrar su solución. Con estos parámetros, la labor estudiantil se reduce a memorizar fórmulas compuestas por operaciones, como recetas de cocina o partituras musicales, las cuales aplican a los patrones de problemas expuestos en los textos guías, pero cuando el maestro los examina haciendo pequeñas variaciones a estos patrones, surgen problemas que solo aquellos que comprendieron el significado de las operaciones involucradas, son capaces de resolver. En consecuencia, los estudiantes pierden la motivación por el estudio de las matemáticas, haciéndose incapaces de aplicarlas a sus problemas cotidianos, o en la comprensión de otras áreas del saber, como las ciencias físicas. A esto se le suma el desarrollo de la insensibilidad ante la estética del raciocinio matemático. Este contexto es similar al de los cocineros incompetentes para descubrir nuevos sabores debido a que solo siguen sus recetas, o al de los músicos incapaces de componer nuevas sinfonías puesto que solo saben leer partituras.

Este desafío pedagógico no es ajeno a la educación superior en Colombia, donde los profesionales que tienen contacto con las matemáticas durante su formación, solo se les enseñan sus operaciones mas no a reflexionar sobre su comprensión, lo cual les ayudaría en su aplicación. Esto explica la ineptitud de los profesionales del país para producir nuevo conocimiento y tecnología, pero su gran habilidad para aprender a utilizar la que es producida en otros lugares, puesto que son hábiles siguiendo reglas.

La presente obra fue escrita con la finalidad de abordar el desafío pedagógico de la enseñanza del álgebra elemental, teniendo en cuenta la reflexión piagetana, proporcionando guías para la presentación de los conceptos algebraicos, y propuestas de materiales didácticos, de bajo precio y fáciles de conseguir, como las barras de Cuisenaire o el cartón. Al seguir la guía proporcionada en el libro, los maestros tendrán a disposición ejemplos y dispositivos que cautivan el interés de sus estudiantes, basados en juegos populares como el fútbol, o entretenidos y llamativos como la balanza matemática y la minicomputadora de Papy.

Una vez expuesto el marco conceptual y de trabajo en el primer capítulo, el libro expone cómo pueden ser abordados los temas del álgebra elemental, teniendo en cuenta el nivel de abstracción de los estudiantes de acuerdo al estadio biológico que impone su edad, pero dirigiéndolo en la comprensión de la semántica de las operaciones algebraicas hasta su aplicación a la solución de problemas, acercando el álgebra a la cotidianidad pero sin sacrificar el

rigor de las demostraciones, de tal manera que el alumno puede entender de dónde provienen formulaciones como el teorema de Pitágoras, o la fórmula general para resolver ecuaciones de segundo orden de una manera sencilla.

Aunque el texto está concebido para maestros de álgebra elemental, es una valiosa guía para padres de familia interesados en fomentar en sus hijos la habilidad de resolver problemas mediante la aplicación del álgebra básica. También, esta obra sirve de lectura complementaria para alumnos, que una vez familiarizados con las reglas que rigen las operaciones algebraicas, quieren comprender y reflexionar acerca de su semántica, y su aplicación a la solución de problemas.

En conclusión, **Álgebra desde una perspectiva didáctica**, es una excelente obra para guiar a todo aquel que quiera acercar, de una manera creativa y entretenida, a sus estudiantes o hijos a los conceptos del álgebra elemental y su aplicación en el arte perdido de resolver problemas.

ISAAC BERNARDO CAICEDO.

Profesor de tiempo completo, Universidad de Córdoba, Colombia.

MSc en Ingeniería, Universidad de Los Andes, Colombia.

Candidato a Doctor en Ciencias, Universidad de Grenoble, Francia.

Candidato a Doctor en Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia.

email: Isaac-Bernardo.Caicedo-Castro@imag.fr

Grenoble, Francia, Julio de 2013.

EL PENSAMIENTO FORMAL Y LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA

La enseñabilidad es una característica derivada de la epistemología de cada ciencia referida a su forma particular de expresión, contenido y fundamentos teóricos y experimentales, que caracteriza la manera de abordar sus problemas particulares y condiciona de modo específico cómo esta debe enseñarse.

Entender por qué cada disciplina científica requiere de una forma particular de transmisión, no implica tener la solución a los problemas de su didáctica. El diseño didáctico para una materia específica requiere fundamentarse en al menos tres dominios imprescindibles del conocimiento:

1. Las condiciones de enseñabilidad de cada disciplina.
2. El enfoque o teoría pedagógica que inspirará el proceso.
3. La identificación de las condiciones sicológicas sociales y culturales que condicionan la mentalidad del alumno respecto al aprendizaje de la asignatura.

Ninguno de estos tres aspectos del conocimiento puede ser ignorado por el maestro cuando se enfrenta a la enseñanza de una disciplina teniendo como meta la verdadera formación de sus alumnos. No se desarrollará un proceso formativo si el profesor, quien debe ser experto en el saber específico, no reflexiona sobre los logros que se propone alcanzar con su enseñanza, la forma de avanzar, cuáles experiencias, contenidos y técnicas son más apropiadas

Otros títulos de interés:

Didáctica de las matemáticas
Róbinson Castro Puche
Rubby Castro Puche

Fundamentos de matemática
Francisco Soler Fajardo

Matemáticas para informática
Ismael Gutiérrez García

Geometría desarrollo
axiomático
Ana Berenice Guerrero

Matemáticas conceptos
previos al cálculo
Francisco Soler F.
Lucio Rojar Cortés
Luis Enrique Rojas C.

Introducción al álgebra lineal
Fernando Mesa
Oscar Fernández Sánchez
Edgar A. Valencia Angulo

Álgebra desde una perspectiva didáctica



Hoy en día, pocos alumnos alcanzan a tener el grado de destreza necesario para desarrollar problemas algebraicos, y los docentes no encuentran el modo de lograr que esas destrezas sean adquiridas en clase.

¿Es posible entusiasmar a los alumnos e incorporarlos activamente desde una posición de interés intelectual en el trabajo?

“Álgebra desde una perspectiva didáctica es una excelente obra para guiar a todo aquel que quiera acercar, de una manera creativa y entretenida, a sus estudiantes o hijos a los conceptos del Álgebra elemental y su aplicación en el arte perdido de resolver problemas”.

ISAAC BERNARDO CAICEDO

MSc en Ingeniería, Universidad de Los Andes, Colombia.

Candidato a Doctor en Ciencias, Universidad de Grenoble, Francia.

Candidato a Doctor en Ingeniería, Universidad Nacional de Colombia.

Grenoble, Francia, Julio de 2013.

Colección: Ciencias exactas

Área: Matemáticas

ECOE
EDICIONES

www.ecoediciones.com

