

HUMBERTO LLINÁS SOLANO

INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE LA **PROBABILIDAD**

UN UNIVERSIDAD
DEL NORTE
Editorial

ECOE
EDICIONES

Introducción a la Teoría de la probabilidad

Humberto Llinás Solano

Barranquilla
COLOMBIA, 2014

 **UNIVERSIDAD
DEL NORTE**
Editorial

ECOE
EDICIONES


El autor

HUMBERTO LLINÁS SOLANO

Licenciado en Ciencias de la Educación, con énfasis en Matemáticas, Física y Estadística de la Universidad del Atlántico (Colombia). Magister en Matemáticas, convenio Universidad del Valle-Universidad del Norte (Colombia). Doctor en Estadística (Dr. rer. nat.) de la Universidad Johannes Gutenberg de Mainz (Alemania). Desde 1998 se desempeña como profesor de tiempo completo de la Universidad del Norte y forma parte de los grupos de investigación Matemáticas y Enfermedades tropicales de dicha institución. Autor de los productos¹:

- *Estadística descriptiva y distribuciones de probabilidad* (2005, [51])
- *Estadística inferencial* (2006, [52])
- *Una visión histórica del concepto moderno de integral* (como editor, 2006, [43])
- *Medida e integración* (2007, [53])
- *Applets de estadística* (2007, [55])
- *Introducción a la estadística con aplicaciones en Ciencias Sociales* (2012, [56])
- *Procesos estocásticos con aplicaciones* (como coautor, 2013, [1])
- *Introducción a la estadística matemática* (2014, [57])

¹Se cita el título del texto o applet, el año de publicación y la referencia bibliográfica respectiva. Cuando sea necesario, un comentario adicional.

Contenido

Prefacio	xiii
Introducción	xix
Notaciones y preliminares	xxvii
1 Probabilidad	1
1.1 Experimentos y espacios muestrales	1
1.2 σ -álgebras	2
1.2.1 σ -álgebra generada	3
1.2.2 σ -álgebra de Borel	4
1.3 Espacios de probabilidad	5
1.4 Tipos de espacios de probabilidad	9
1.4.1 Espacios de probabilidad discretos	9
1.4.2 Espacios de probabilidad laplacianos	10

1.5	Permutaciones y combinaciones	12
1.5.1	Reseña histórica	12
1.5.2	Permutación	15
1.5.3	Combinación	19
1.6	Modelos de urnas	24
1.7	Probabilidades condicionales	28
1.8	Independencia	35
☞	Breve biografía de T. Bayes y E. Borel	40
📖	Ejercicios	43
2	Distribuciones de probabilidad	51
2.1	Variables aleatorias	51
2.2	Funciones de distribución y densidad	58
2.3	Distribuciones de probabilidad de funciones de variables aleato- rias reales	62
☞	Breve biografía de A. N. Kolmogorov	64
📖	Ejercicios	67
3	Distribuciones especiales	73
3.1	Discretas	73
3.1.1	Distribución uniforme discreta	74
3.1.2	Distribuciones de un punto y de Bernoulli	74
3.1.3	Distribución binomial	76
3.1.4	Distribución de Polya	77
3.1.5	Distribución hipergeométrica	79
3.1.6	Distribución de Poisson	80
3.1.7	Distribución binomial negativa	83
3.1.8	Distribuciones de Pascal y geométrica	84

3.2	Continuas	85
3.2.1	Distribución uniforme continua	86
3.2.2	Distribución normal (unidimensional)	86
3.2.3	Distribución gamma	90
3.2.4	Distribución exponencial	94
3.2.5	Distribución beta	95
3.2.6	Distribución de Cauchy	98
3.2.7	Distribución de Laplace	99
3.2.8	Distribución χ^2	100
3.2.9	Distribución t de Student	101
3.2.10	Distribución F de Fisher	102
3.2.11	Distribución log-normal	103
3.2.12	Distribución de Weibull	104
3.2.13	Distribución de Rayleigh	106
3.2.14	Distribución de Erlang	107
3.2.15	Distribución de Maxwell	107
3.2.16	Distribuciones de valor extremo	108
3.2.17	Distribuciones de Pareto	109
☞	Breve biografía de J. Bernoulli	111
📖	Ejercicios	114
4	Momentos	117
4.1	Esperanza y varianza	117
4.2	Momentos	120
4.3	Función generadora de momentos	120
☞	Breve biografía de S. D. Poisson	121
📖	Ejercicios	122

5	Distribuciones conjuntas	125
5.1	Vectores aleatorios	125
5.2	Vectores aleatorios discretos y continuos	126
5.2.1	Vectores aleatorios discretos	126
5.2.2	Vectores aleatorios continuos	128
5.2.3	Variables aleatorias independientes	132
5.3	Varianza de sumas, covarianza y correlación	133
5.4	Esperanza y varianzas condicionales	137
5.4.1	Distribuciones condicionales	137
5.4.2	Teorema de la probabilidad total y regla de Bayes	138
5.4.3	Esperanza condicional	140
5.5	Convoluciones de medidas de probabilidad	144
5.6	Distribución de la media empírica, varianza empírica y razón de varianzas empíricas	149
5.7	Teoremas de transformación	152
5.8	Distribuciones compuestas	156
5.8.1	Distribución binomial compuesta	157
5.8.2	Distribución de Poisson compuesta	158
5.8.3	Distribución binomial generalizada	159
✎	Breve biografía de I. J. Bieynamé	161
🏠	Ejercicios	162
6	Teoremas de convergencias	171
6.1	Propiedades que se cumplen casi seguro	171
6.2	Tipos de convergencia	172
6.3	Ley débil de los grandes números	179
6.4	Ley fuerte de los grandes números	185
6.5	Convergencia en distribución	192

6.6 Teorema central del límite	198
☞ Breve biografía de A. Y. Khinchin, P. L. Chevishev y P. Lévy . . .	207
👉 Ejercicios	210
A Apéndice de resultados	215
B Apéndice de tablas	223
1. La función de distribución binomial	223
2. La función de distribución de Poisson	227
3. La función de distribución normal estándar	228
4. Valores críticos para la distribución t	230
5. Distribución chi-cuadrada	231
6. Valores críticos para la distribución F	233
7. Algunas distribuciones continuas	237
8. Algunas distribuciones discretas	238
Bibliografía y referencias	239
Índice	245

Introducción

L'origine du calcul des probabilités, comme celle des autres branches des Mathématiques, se trouve dans des observations concrètes; ce sont en effet³ les jeux de hasard qui lui ont donné naissance, et, d'ailleurs, ce seront des schémas concrets, tirés de ces jeux, qui nous permettront de rendre le calcul des probabilités plus intuitif. (É. BOREL [9, pág.1])

El *cálculo de probabilidades* es relativamente una de las ramas de la matemática más joven. Por ejemplo, fenómenos que hoy se representan con el cálculo de las probabilidades, como el juego de dados, ya eran conocidos en la Antigüedad. En su *Ars rhetorica* ARISTÓTELES (384 - 322 a. C.;62) da un punto de partida notable para la construcción del concepto de probabilidad con las palabras *Lo probable es algo que, en general, sucede*. El franciscano LUCA DE PACIOLI (1445-1514;69), uno de los impulsores del álgebra en Occidente, ha expuesto en [63], por ejemplo, una tarea sobre probabilidades pero llegó a

³El origen del cálculo de las probabilidades, como aquellas otras ramas de las matemáticas se encuentra dentro de las observaciones concretas; en efecto, éstas son los juegos de azar que le han hecho nacer y, además, todavía será de los esquemas concretos, sacados de estos juegos, los que nos permitirán deducir el cálculo de probabilidad más intuitivo.

un resultado falso. Sin embargo, GIROLAMO CARDANO⁴ (1501-1576;75) y GALILEO GALILEI (1564-1642;78) resolvieron correctamente tareas teóricas-probabilísticas especiales. El *concepto de probabilidad* es todavía mucho más viejo y jugó un papel significativo en la filosofía griega antigua (compárese, por ejemplo, la correspondencia entre PALTON y ZITAT). La idea de que las leyes de la naturaleza se manifiestan a través de un número grande de eventos aleatorios había surgido ya de los materialistas griegos antiguos y es tratado detalladamente en «De rerum natura» (*sobre la naturaleza de la cosa*) de LUKREZ⁵.

No es de extrañar que las primeras consideraciones teóricas-probabilísticas fueran desarrolladas en los juegos de azar (en especial en los siglos XVII y XVIII), respecto a los cuales, los juegos de dados llegaron a ser los preferidos. Como comienzo del cálculo de probabilidades como ciencia independiente se considera una correspondencia entre BLAISE PASCAL (1623-1662;39) y PIERRE DE FERMAT (1601-1665;64) en 1654, la cual trataba sobre la solución de una pregunta formulada por un tal CHEVALIER DE MÉRÉ a PASCAL sobre el chance de ganar en determinadas situaciones de, en aquel entonces, juegos de azar (ver, por ejemplo, RÉNYI [70] o ROUSE BALL [78]). PASCAL desarrolló un método para responder las preguntas y le participó a FERMAT las respuestas y el método. FERMAT respondió las preguntas por partes con otro método y PASCAL constató con gran alegría la coincidencia entre sus propios resultados y los de FERMAT. «Je vois bien que la vérité est la même à Toulouse et Paris»⁶ escribe PASCAL. Todas las cartas están impresas en [24, págs. 288-314]. Para más detalles, véase, por ejemplo, las muy claras exposiciones de I. TODHUNTER [82] y F.N. DAVID [16]. En verano de 1655, a través de una conversación, el gran matemático holandés CHRISTIAN HUYGENS tuvo conocimiento en París de las investigaciones de FERMAT y PASCAL sobre cálculos de probabilidades; sin embargo, estos últimos habían mantenido

⁴G. CARDANO fue matemático, médico famoso y autor de tratados filosóficos populares. Al parecer fue un apasionado jugador de juegos de azar. Su libro *Liber de ludo aleæ*, que trata de los chances en el juego de azar, fue publicado en Lyon en 1663. Es el libro más antiguo sobre cálculo de probabilidades. Una traducción inglesa se encuentra en [62].

⁵En este contexto, los lugares más importantes están citados en la cuarta carta que aparece en A. RÉNYI [73], en especial en la conversación entre Pascal y Miton (y en las observaciones).

⁶“Yo veo bien que la verdad es la misma en Toulouse y en París”.

en secreto su método. Animado por eso, HUYGENS escribió, en 1656 y en holandés, el primer tratado sistemático sobre el cálculo de probabilidades: *Van rekeningh in spelen van geluck*⁷.

FRANS DE SCHOOTEN, quien había sido instructor de matemáticas de HUYGENS, tradujo el tratado de este al latín y lo incluyó en su *Exercitationes mathematicæ* (1657) como un apéndice, bajo el título *De ratiociniis in ludo aleæ*. Tres años más tarde, las *Exercitationes* fueron publicadas también en holandés. El tratado de HUYGENS se basa en un análisis lógico del concepto de “valor de una esperanza” (*Valor expectationis*, es decir, valor esperado o esperanza) y enseña cómo se puede calcular la esperanza del jugador en juegos de azar. HUYGENS no definió este concepto sino que solo lo restringió a un axioma.

Mientras que HUYGENS, en su tratado ya mencionado, solo se ocupó de juegos del azar, JACOB BERNOULLI (1654-1703;49) [3] en su *Ars Conjectandis* (en español: *Arte de las Conjeturas*) sobrepasa ese límite. El reconoció el significado básico del concepto de probabilidad en la vida humana y en la vida judicial y demostró la “ley de los grandes números”, que hasta el día de hoy representa la base de la estadística matemática.

BERNOULLI llamó su enseñanza de la probabilidad *Ars Conjectandi*, es decir, arte de las conjeturas. Comparando este título con las obras anteriores de CARDANO (*De ludo aleæ*) y HUYGENS (*De ratiociniis in ludo aleæ*), se observa cómo se ha transformado el punto de la historia.

El juego de dados es un juego, pero, a la vez, conjeturas, esto es, una actividad superflua. Cada sentencia, cada teoría científica, cada estrategia militar y cada empresa científica se basa en suposiciones. Para cada hecho se rinde cuentas de los resultados probables o, por lo menos, se debería rendir cuentas de eso, y el cálculo de probabilidades puede ayudar a estimar las probabilidades de los cómodos e incómodos resultados. Las sociedades de seguro evalúan probabilidades con base en estadísticas y después establecen sus tarifas. Hay una estadística matemática que nos enseña a estimar probabilidades equivocadas de conclusiones experimentales; hay una teoría de decisión y una investigación de empresas que se valen continuamente de las probabilidades. Pero antes de BERNOULLI no había nada de eso. El fue de los que primero llamó la atención de la humanidad sobre la importancia teórica y práctica de la “conjetura”.

El *Ars Conjectandi* fue publicado solo hasta en 1713, es decir, 8 años después de la muerte de su autor. Consta de cuatro partes. En la primera y tercera parte BERNOULLI resuelve tareas

⁷*Œuvres complètes de Chr. Huygens*, publiées para la Société hollandaise des Sciences, vol. 14, p. 61 (La Haye, Martinus Nijhoff, 1920).

sobre juegos de azar de la misma manera como las tareas que PASCAL y HUYGENS se habían propuesto. La primera parte es una reproducción del tratado de HUYGENS con comentarios y presenta en forma completa completa, sin solución, todos los problemas mencionados por este. En la segunda parte BERNOULLI trata primero la teoría de las permutaciones, combinaciones y combinaciones con repetición. Presenta una tabla de los “números figurados” o coeficientes binomiales y demuestra sus “propiedades maravillosas” (BERNOULLI no conocía el *triángulo aritmético* de PASCAL). En esta parte se incluye lo que se conoce con el nombre de “números de Bernoulli”. En la tercera parte se aplica la enseñanza de las combinaciones a diferentes juegos de azar y de dados. En general, la meta es, como en HUYGENS [37], el cálculo del valor esperado de la ganancia del jugador. La cuarta parte es la más importante y la más original. Esta parte incluye el título *Tradens usum et applicationem præcedentis doctrinæ in civilibus, moralibus et (Economicis)*⁸. Por este título se nota que ya BERNOULLI estaba bien consciente del alcance extraordinario de su investigación. Se propuso aplicar la teoría de la probabilidad a preguntas de interés en ciencias morales y económicas. Entre otras cosas, en esta parte demuestra la ley (débil) de los grandes números.

La obra de PIERRE REMOND DE MONTMORT (1678-1719;41): *Essai d'Analyse sur les Jeux de Hazard* (*Ensayo de análisis sobre los juegos de azar*), escrita algo más tarde pero publicada mucho antes (1708) que el *Ars conjectandi* de BERNOULLI, también parte de HUYGENS y, con esto, indirectamente de la correspondencia entre PASCAL y FERMAT. Lo mismo se puede decir del importante trabajo *De Mensura sortis seu, de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus*⁹, de ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754;87), publicado en 1711 en la *Philosophical Transactions*.

Además de las tareas sobre juegos de azar, en el comienzo del desarrollo del cálculo de probabilidades se realizaron también tareas sobre tablas de mortalidad y sobre seguros. Ya desde 1592 en Londres se habían hecho anotaciones exactas sobre la mortalidad. JOHN GRAUNT (1620-1674;54) fue el primero que, en 1662 y por motivo de estas anotaciones, calculó la probabilidad de mortalidad como función de la edad de vida. Unos años más tarde, los holandeses JAN HUDDE (1628-1704;76) y JAN DE WITT (1625-1672;47) hicieron consideraciones análogas y las aplicaron al cálculo de rentas en la vida; este problema fue investigado más tarde (1693) por EDMOND HALLEY (1656-1742;86). Una

⁸ *Aplicación de la doctrina anterior sobre comportamientos cívicos, morales y económicos.*

⁹ Sobre la medida del azar o sobre la probabilidad de los resultados en juegos de azar.

nueva idea (la regla de división) fue introducida en el cálculo de probabilidad por THOMAS BAYES (1702-1761;59). Después de su muerte, su trabajo fue publicado por el Reverendo RICHARD PRICE [67] y [67]. Entonces, partiendo de los fundamentos ya construidos y con ayuda de la poderosa herramienta del análisis matemático desarrollado en ese entonces, PIERRE SIMÓN, MARQUÉS DE LAPLACE (1749-1827;78) [44] logró construir el armazón que hasta en el día de hoy sirve como modelo de cada representación del cálculo de las probabilidades. Los temas esenciales de su obra fueron: la derivación de los “teoremas límites” más importantes de la probabilidad, la introducción de las “funciones generatrices” como herramientas matemáticas de ayuda y la aplicabilidad de la probabilidad sobre diversas ramas de la actividad humana.

Después de LAPLACE, SIMÉON DENIS POISSON (1781-1840;51) [66] desarrolló un trabajo en el que explicó una parte importante del teorema de BERNOULLI. Desafortunadamente, con el tiempo, el conocimiento del fundamento empírico del cálculo de probabilidades se fue perdiendo más y más. La causa de esto se debe en gran parte al ingenioso trabajo de LAPLACE [45], en el que presentó una interpretación a priori, que, con fuerte autoridad, repercutió durante casi más de un siglo. LAPLACE colocó al frente de todas las consideraciones la llamada definición de probabilidad. En esta se presenta un *petitio principii*, ya que “posible” solo puede ser una palabra válida para probabilidades iguales. Además, el error más insignificante de esta definición consiste en que no solo se puede aplicar al ejemplo de un dado “falso” sino también a la probabilidad de vivir y morir. En estos ejemplos no se puede introducir la probabilidad igual. Por tanto, en el siglo XIX el lado matemático y básico de la enseñanza de la probabilidad llegó a ser más y más una imitación de LAPLACE. Naturalmente, esto no excluye que se publicaran algunos libros, como, por ejemplo, los de J. BERTRAND [5] o H. POINCARÉ [65]. Contracorrientes lideradas por el inglés L. ELLIS [22] y el francés A.A. COURNOT [14] no tuvieron éxito. Finalmente, sucedió lo que se puede observar en situaciones parecidas de muchas ramas del saber. De la necesidad de la práctica, de las tareas de la estadística, surgió una nueva enseñanza que aparentemente se colocó al lado de la teoría de la probabilidad como su pareja empírica, y para la cual THEODOR FECHNER (1801-1887;86) introdujo la notación “enseñanza de la medida colectiva”. El astrónomo HEINRICH BRUNS (1848-1919;71) buscó reunir ambas ramas de la enseñanza, por lo menos desde afuera. Por otro lado, la situación también

cambió radicalmente una vez que los físicos “pensantes” puramente determinísticos de la mitad del siglo XIX se enteraban, cada vez con más frecuencia, que fenómenos, en especial en el campo molecular, parecían presentar un indeterminismo forzoso. Por esta razón se explica que el gran matemático DAVID HILBERT (1862-1943;81) expresara en su famoso discurso en la Exposición Universal de París de 1900, sobre los 23 problemas matemáticos no resueltos en aquel entonces, que influyó considerablemente en el desarrollo de la matemática, lo siguiente:

SEXTO TRATAMIENTO MATEMÁTICO DEL AXIOMA DE LA FÍSICA. *A través de las investigaciones sobre los fundamentos de la Geometría debiera se nos sugiere manipular axiomáticamente, según este modelo, disciplinas físicas, en el cual ya la matemática juega hoy un papel excelente; estos son en primera medida el cálculo de probabilidades y la mecánica. En cuanto al cálculo de probabilidades, me parece deseable que con la investigación lógica de la misma vaya cogido de la mano, al mismo tiempo, un desarrollo estricto y satisfactorio del método del valor medio en la física matemática, especialmente, en la teoría cinética de los gases.*

Por tanto, para HILBERT, el cálculo de probabilidades era una rama de la *física*. Después de esto, avances esenciales en la dirección matemática fueron obtenidos por los matemáticos rusos CHEVISHEV, MARKOV y LYAPUNOV. Entonces, el campo de aplicación de la probabilidad se extiende a las ciencias más diferentes (entre otras, mecánica estadística, genética, etc.). En 1919, R. MISES [59] intentó aportar un fundamento de la teoría de las probabilidades basada en la relación entre la probabilidad y el comportamiento de la frecuencia relativa. En genral, la introducción axiomática de la teoría de la probabilidad, como medida normada sobre un espacio medible y que es aceptada en el día de hoy, fue introducida por el matemático ruso A.N. KOLMOGOROV (1903-1987;84) [41] en 1933. Con esto, la teoría de la probabilidad llegó a ser una disciplina importante de la *matemática*, en especial de la teoría de la probabilidad y de la matemática aplicada.

Una de las caracterizaciones importantes de la teoría matemática aplicada parece estar contenida en lo siguiente: partiendo de realidades problemas se construye un modelo matemático. Entonces, dentro de este modelo se constru-

yen (independiente de las situaciones resultantes) afirmaciones matemáticas y, finalmente, estos resultados se trasladan a la realidad. Para ello, la teoría de la probabilidad se ha propuesto la tarea de registrar resultados reales “aleatorios” en modelos matemáticos y mostrar leyes partiendo de estos modelos (en general, se podría formular como meta de la teoría de la probabilidad trabajar, sobre todo, en situaciones en las que no son posibles pronósticos seguros pero cuyas predicciones tengan sentido). Si se quiere llegar a afirmaciones matemáticas, entonces, en general, no se puede exigir que *cada detalle* de la realidad encuentre una correspondencia en el modelo matemático. Sin embargo, de un modelo con sentido se puede exigir que contenga *todas las estructuras relevantes* para que los resultados obtenidos en el modelo puedan servir, en su traslado hacia la descripción exacta de la realidad, como base para tomar decisiones. Para ello se necesita un modelo abstracto de eventos aleatorios que, por un lado, sea suficiente para poder abarcar en general todas las situaciones que aparecen en las aplicaciones y, por otro lado, que sea suficiente para poseer una rica estructura y para posibilitar una investigación matemática.

Este derecho de la teoría de la probabilidad, modelo para crear y analizar resultados reales, significa también que, para su desarrollo matemático, ella siempre deba aguantar la prueba de que hasta qué punto sus resultados tengan sentido al trasladarse a la realidad (desde su origen en nuevas ramas como, por ejemplo, control de calidad, investigación de operaciones, teoría de información, estadística, etc., la teoría de la probabilidad ha demostrado la prueba de su utilidad y de su éxito).

Para la construcción de la teoría queremos dar la formulación teórica de la medida que ha resultado conveniente y exitosa para la descripción de lo “aleatorio”. A través de ello, la teoría llega a ser inmediatamente abstracta, pero se intentará siempre hacer lo más claro posible los significados de los conceptos y afirmaciones introducidos.

Probabilidad

1.1 Experimentos y espacios muestrales

Die Wahrscheinlichkeitstheorie als mathematische Disziplin soll und kann genau in demselben Sinne axiomatisiert werden wie die Geometrie oder die Algebra. Das bedeutet, daß, nachdem die Namen der zu untersuchenden Gegenstände und ihrer Grundbeziehungen sowie die Axiome, denen diese Grundbeziehungen zu gehorchen haben, angegeben sind, die ganze weitere Darstellung sich ausschließlich auf diese Axiome gründen soll und keine Rücksicht auf die jeweilige konkrete Bedeutung dieser Gegenstände und Beziehungen nehmen darf. (A.N KOLMOGOROV [41, pág.1])

La validez de la mayoría de las teorías científicas está basada, en gran parte, en que los experimentos sobre los cuales se fundamentan las teorías suministran esencialmente el mismo resultado cuando estos se repiten. Por lo tanto, los llamamos EXPERIMENTOS DETERMINÍSTICOS. Un ejemplo de la física es la ley

¹La teoría de la probabilidad, como disciplina matemática, se debe y se puede axiomatizar exactamente en el mismo sentido que la geometría o el álgebra. Esto significa que después que sean dados los nombres de los objetos investigados y sus relaciones básicas, así como los axiomas que deben obedecer estas relaciones básicas, la representación total se debe basar exclusivamente sobre estos axiomas y no puede tomar en consideración los significados concretos respectivos de estos objetos y de estas relaciones.

Este libro, dirigido a un público amplio, surge a partir de las notas de clases de la asignatura Teoría de la Probabilidad, impartida por el autor en los programas de posgrados de Estadística y de Ingeniería de la Universidad del Norte (Colombia). Contiene citas originales e información clave acerca del devenir histórico de esta materia, y desarrolla matemáticamente los aspectos más importantes relacionados con la Teoría de la Probabilidad. Todo ello le permitirá al lector tener un enfoque general de los avances teóricos de esta materia, conocer biografías breves de algunos de los matemáticos que contribuyeron significativamente a su desarrollo y ejercitar, mediante la resolución de problemas, la comprensión de los contenidos.



ECOE
EDICIONES



UNIVERSIDAD
DEL NORTE