

Matemáticas financieras aplicadas

Sexta edición

Jhonny de Jesús Meza Orozco



Meza Orozco, Jhonny de Jesús

Matemáticas financieras aplicadas / Jhonny de Jesús Meza Orozco. -- 6a. ed. – Bogotá : Ecoe Ediciones, 2017.

530 p. – (Ciencias empresariales. Contabilidad y finanzas)

Incluye bibliografía.

ISBN 978-958-771-493-7 -- 978-958-771-494-4 (e-book)

1. Matemáticas financieras 2. Finanzas 3. Tasas de interés

I. Título II. Serie

CDD: 658.152 ed. 23

CO-BoBN- a1002031



Colección: Ciencias empresariales

Área: Contabilidad y finanzas

ECOE
EDICIONES



© Jhonny de Jesús Meza Orozco

© Ecoe Ediciones Ltda.
e-mail: info@ecoediciones.com
www.ecoediciones.com
Carrera 19 # 63C 32, Tel.: 248 14 49
Bogotá, Colombia

Primera edición: Valledupar, 2002

Segunda edición: Bogotá, enero de 2003

Tercera edición: Bogotá, enero de 2008

Cuarta edición: Bogotá, julio de 2011

Quinta edición: Bogotá, agosto de 2013

Sexta edición: Bogotá, junio de 2017

ISBN: 978-958-771-493-7

e-ISBN: 978-958-771-494-4

Dirección editorial: Angélica García Reyes

Corrección de estilo: Laura Lobatón Sanabria

Diagramación: Denis Rodríguez Ríos

Carátula: Wilson Marulanda Muñoz

Impresión: Editorial Buena Semilla

Carrera 28A # 64 A - 35

Prohibida la reproducción total o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en Colombia - Todos los derechos reservados

*A la memoria de mi padre,
José Lucas Meza (Q.E.P.D.),
A mi madre, a mi familia,
a mis alumnos.*

Contenido



Capítulo 0

Preliminares	1
1. Introducción	1
2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita	2
2.1 Principios fundamentales de las ecuaciones	2
3. Potenciación	4
3.1 Operaciones con potencias	5
3.2 Operaciones inversas de la potenciación	7
4. Logaritmos.....	9
4.1 Propiedades de los logaritmos.....	10
4.2 Operaciones con logaritmos.....	10
4.3 Sistemas de logaritmos	11
5. Ecuaciones exponenciales.....	14

Capítulo 1

Conceptos fundamentales.....	15
0. Introducción	15
1. Valor del dinero en el tiempo	17
2. Interés	19
2.1 Tasa de interés.....	20
3. Equivalencia	21
4. Resumen de los conceptos fundamentales	22
5. Símbolos y su significado.....	23
6. Flujo de caja	24

Capítulo 2

Interés simple	33
0. Introducción	33
1. Definición de interés simple.....	34
1.1 Características del interés simple.....	34
2. Cálculo del interés	34
3. Interés comercial y real	37
4. Cálculo del número de días entre fechas	38
5. Valor futuro a interés simple	41
6. Desventajas del interés simple.....	43
7. Valor presente a interés simple.....	44
8. Cálculo de la tasa de interés simple.....	45
9. Cálculo del tiempo de negociación	47
10. Operaciones de descuento.....	48
10.1 Descuento comercial	49
10.2 Descuento racional o justo.....	50

Capítulo 3

Interés compuesto	55
0. Introducción	55
1. Definición del interés compuesto	56
1.1 Capitalización	56
1.2 Período de capitalización	56
2. Valor futuro a interés compuesto.....	57
3. Características del interés compuesto	58
4. Limitaciones de la fórmula de interés compuesto	60
5. Introducción al manejo de la calculadora financiera.....	61
5.1 La hoja de cálculo Excel	67
6. Valor futuro con tasa variable	72
7. Valor presente a interés compuesto.....	76
7.1 Valor presente con tasa variable.....	80
8. Tasa de interés compuesta	82
9. Tiempo de negociación.....	84
10. Ecuaciones de valor	87
10.1 Pasos para construir una ecuación de valor	90
<i>Buscar objetivo de Excel aplicado a las ecuaciones de valor</i>	91

Capítulo 4

Tasas de interés.....	129
0. Introducción	129
1. Estructura de las tasas de interés	130
1.1 Tasa nominal.....	130
1.2 Tasa efectiva anual (EA).....	132
1.3 Tasa periódica.....	133
2. Relación entre la tasa nominal (J) y la tasa periódica (i)	135
3. Relación entre las tasas efectivas periódicas.....	138
4. Tasas equivalentes	140
4.1 Caso 1 (Efectiva \Leftrightarrow Efectiva).....	141
4.1.1 Caso de efectiva periódica menor a efectiva periódica mayor.....	142
4.1.2 Caso de efectiva periódica mayor a efectiva periódica menor	145
4.2 Caso 2 (Efectiva \Leftrightarrow Nominal)	154
4.3 Caso 3 (Nominal \Leftrightarrow Efectiva)	156
4.4 Caso 4 (Nominal \Leftrightarrow Nominal).....	160
5. Tasa de interés anticipada	163
5.1 Conversión de una tasa anticipada en vencida	165
5.2 Conversión de una tasa vencida en anticipada	167
6. Ecuación de la tasa efectiva en función de la tasa efectiva periódica anticipada	178
7. Diagrama de conversión de tasas de interés.....	180
8. Aplicación de la tasa anticipada con interés compuesto.....	181
9. Crédito con proveedores	182
10. D.T.F. (depósito a término fijo)	188
11. Tasa de inflación.....	190
12. Tasa real o tasa deflactada.....	204
12.1 Rentabilidad neta de una inversión	204
12.2 Costo de la deuda después de impuestos	207
12.3 Rentabilidad real de una inversión	211
12.4 Costo real de un crédito	216

Capítulo 5

Anualidades o series uniformes	239
0. Introducción.....	239
1. Definición de anualidad.....	241
1.1 Renta o pago	241
1.2 Período de renta	241
2. Condiciones para que una serie de pagos sea una anualidad	242
3. Clases de anualidades.....	242
4. Anualidad vencida.....	242
4.1 Valor presente de una anualidad vencida	243
4.2 Valor presente de una anualidad vencida con tasa variable	250
4.3 Valor de la cuota en función del valor presente.....	251
4.4 Valor futuro de una anualidad vencida	256
4.4.1 Valor futuro de una anualidad vencida con tasa variable.....	259
4.5 Valor de la cuota en función del valor futuro.....	265
4.6 Cálculo del tiempo de negociación.....	270
4.7 Cálculo de la tasa de interés.....	279
5. Anualidad con interés global.....	286
6. Cálculo del saldo insoluto.....	294
7. Anualidad anticipada	308
7.1 Valor presente de una anualidad anticipada.....	309
7.2 Valor de la cuota de una anualidad anticipada	323
7.3 Cálculo del tiempo de negociación.....	329
7.4 Cálculo de la tasa de interés de una anualidad anticipada	331
7.5 Valor futuro de una anualidad anticipada	339
8. Anualidad diferida.....	341
9. Anualidad perpetua.....	348
9.1 Valor presente de una anualidad perpetua	348
10. Anualidad general.....	349
10.1 Período de capitalización	349
10.2 Período de pago.....	350

Capítulo 6

Gradientes o series variables.....	373
0. Introducción	373
1. Definición	375
2. Condiciones para que una serie de pagos sea un gradiente	375
3. Gradiente lineal o aritmético.....	376
3.1 Gradiente lineal creciente	376
4. Gradiente lineal decreciente.....	391
4.1 Valor presente de un gradiente lineal decreciente	391
5. Gradiente geométrico o exponencial	398
5.1 Gradiente geométrico creciente	398
5.2 Gradiente geométrico decreciente	404
6. Gradiente escalonado o en escalera.....	407
6.1 Valor presente de un gradiente geométrico escalonado	407

Capítulo 7

Sistemas de amortización	429
0. Definición	429
1. Sistema de amortización	429
1.1 Composición de los pagos	430
1.2 Tabla de amortización	430
1.3 Cálculo del saldo insoluto.....	431
2. Sistemas de amortización	431
2.1 Amortización con pago único del capital al final del plazo.....	432
2.2 Sistema de cuota fija	433
2.3 Sistema de cuota fija con cuotas extraordinarias	435
2.4 Sistema de cuota fija con período de gracia	437
2.5 Sistema de abono constante a capital	441
2.6 Sistema de cuota fija con interés global.....	451
2.7 Sistema de cuotas crecientes en forma lineal	453
2.8 Sistema de cuotas crecientes en forma geométrica.....	456
2.9 Amortización con cuotas mensuales fijas, crecientes anualmente en un porcentaje fijo.....	458

2.10 Sistema de cuota fija con tasa variable (D.T.F)	460
2.11 Sistema de abono constante a capital con tasa variable (D.T.F)	463
2.12 Financiación de la vivienda en Colombia.....	465
Capítulo 8	
Evaluación de alternativas de inversión	481
0. Introducción.....	481
1. Tasa de descuento	482
2. Valor Presente Neto (VPN)	483
2.1 Criterios para aceptar o rechazar proyecto usando el VPN	488
3. Valor presente neto no periódico (VPN.NO.PER).....	495
4. Tasa Interna de Retorno (TIR).....	498
4.1 Cálculo de la TIR.....	499
4.1.1 Método analítico.....	499
4.1.2 Método gráfico para calcular la TIR.....	503
5. Significado de la TIR	505
5.1 Criterios para aceptar o rechazar un proyecto usando la TIR	507
6. Tasa verdadera de rentabilidad (TIR modificada).....	508
7. Tasa interna de retorno no periódica (tir.no.per).....	512
Bibliografía.....	527



Al final del libro está ubicado el código para que pueda acceder al **Sistema de Información en Línea – SIL**, donde encontrará un archivo referente a la conversión de tasas de interés, un aplicativo sobre interés moratorio y un solucionario de los ejercicios presentados en el libro.

Prólogo



Los oportunos comentarios recibidos por los profesores de la materia, alumnos de pregrado y postgrado, así como de pequeños empresarios, sobre el contenido y forma de desarrollar los temas propios de las Matemáticas financieras incluidos en la quinta edición de este libro, y el avance de las herramientas tecnológicas, especialmente la hoja de cálculo Excel hicieron imperiosa la obligación de presentar a la comunidad universitaria y empresarial esta nueva edición, en la cual se realiza una minuciosa revisión de la literatura utilizada en la quinta edición, para describir y explicar los temas propios de las Matemáticas financieras y se llega a reescribir los principales conceptos como el valor del dinero en el tiempo, ecuaciones de valor, estructura de las tasas de interés, el valor presente neto (VPN) y la tasa interna de retorno (TIR) en un lenguaje tan sencillo que llegue a la altura de la capacidad de comprensión del lector.

A partir del capítulo 2, dedicado a la descripción y solución de operaciones financieras con interés simple, se hace mayor énfasis en el uso de la hoja de cálculo Excel con la finalidad de que el lector logre visualizar la evolución de la operación financiera resuelta con la aplicación de las fórmulas de las Matemáticas financieras.

En el capítulo 3 se plantea la solución de los ejercicios utilizando las fórmulas de las Matemáticas financieras, las calculadoras financieras, las funciones financieras de Excel y la solución con la hoja de cálculo Excel. El contenido y redacción del tema fundamental de las Ecuaciones de valor se modifica con la expectativa de una mayor comprensión por parte del lector. En este capítulo se explica en una forma

amplia y detallada el uso de la herramienta de Excel *Buscar objetivo*, para resolver las ecuaciones de valor utilizando las nuevas tecnologías didácticas. Como parte final del capítulo, se desarrolla una tanda de ejercicios utilizando el procedimiento matemático de las Ecuaciones de valor y el procedimiento tecnológico de *Buscar objetivo* de Excel.

En el capítulo 4 se plantea un nuevo enfoque sobre las tasas de interés (nominal y efectiva) que se utilizan en nuestro sistema financiero y comercial. La equivalencia de tasas de interés (o conversión de tasas de interés) se desarrolla a través de temas de interés (CDT, sobregiro, intereses moratorios, etc) con el propósito de que el lector le encuentre aplicación práctica al proceso de conversión de tasas de interés y no se vuelva un proceso mecánico de manejo de fórmulas matemáticas.

Los contenidos de los capítulos 5 y 6 permanecen inmodificables, con respecto a la quinta edición.

En el capítulo 7, dedicado a los sistemas de amortización de créditos, se incluye el análisis de la UVR (unidad de valor real) que en la anterior edición se trata en el capítulo 4 y se desarrollan los principales sistemas de amortización de créditos vivienda, además de los sistemas de amortización más utilizados para los créditos bancarios y comerciales.

Nuevamente, creemos que con esta nueva edición presentamos a la comunidad universitaria y empresarial una obra actualizada con las nuevas concepciones y herramientas financieras que les permitan potenciar su acervo académico y contar con los suficientes elementos de juicio para tomar en forma acertada las decisiones financieras.

Jhonny de Jesús Meza Orozco

Autor

Preliminares



*La Matemática es la reina de las ciencias
y la Aritmética la reina de la Matemática.*

C. F. GAUSS

1. Introducción

Ha sido evidente para el autor, por su experiencia como docente universitario en el área de finanzas, el bajo nivel de preparación que, en la ciencia de los números, exhibe una buena parte del alumnado que asiste al curso de Matemáticas Financieras, no obstante haber cursado las matemáticas básicas en los primeros semestres de educación superior. Las causas son diversas, entre las que se destacan circunstancias sicológicas y, sobre todo, metodológicas. En primer lugar, poco es lo que se ha hecho por desarraigar la prevención de que la ciencia matemática es demasiado difícil y está destinada a personas dotadas de condiciones excepcionalmente especiales. Y, por otra parte, la metodología desarrollada por algunos docentes no despiertan el entusiasmo y el interés hacia esta ciencia.

La Matemática Financiera es una rama de la matemática básica cuyo soporte es la Aritmética. Tanto es así, que algunos autores coinciden en afirmar que bien podría llamarse *Aritmética Financiera*, ya que para su manejo y comprensión solo es necesario aplicar las operaciones fundamentales de la aritmética, algo de sentido común y capacidad de análisis.

Consciente el autor de esta realidad y con el ánimo de que el lector pueda abordar sin prejuicios el estudio de este texto, se propone exponer en este capítulo, en una forma clara y resumida, las operaciones fundamentales de la Aritmética, haciendo referencia a los temas específicos que se aplican en la solución de los problemas de las Matemáticas Financieras, aunque lo ideal sería que el lector hiciera un repaso general y concienzudo de esta materia utilizando cualquiera de los tantos textos que sobre este tema existen.

A pesar de la existencia en el mercado de las calculadoras científicas y financieras que contienen programas y comandos que permiten la solución rápida de las operaciones fundamentales de la Aritmética, es conveniente revisar los conceptos básicos de esta ciencia. Por esta razón, en este capítulo se tratarán los temas específicos de estudio con tal simplicidad que posibiliten su comprensión total.

2. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Una ecuación es una igualdad en la que hay una o varias cantidades desconocidas llamadas *incógnitas* y que solo es verdadera para determinados valores de las incógnitas. Las incógnitas se acostumbran representar por las últimas letras del alfabeto: x, y, z .

Así: $x + 4 = 9$ es una ecuación que solo es verdadera para $x = 5$. En efecto, si remplazamos x por 5, obtenemos $9 = 9$.

Hay varias clases de ecuaciones: la *ecuación numérica*, que es aquella que no tiene más letras que la incógnita y la *ecuación literal*, o sea, aquella que además de la letra de las incógnitas tiene otras letras que representan cantidades conocidas.

$2x + 45 = x - 6$ es una ecuación numérica

$2x - b = 4x + c$ es una ecuación literal

El *grado* de una ecuación viene determinado por el mayor exponente de la incógnita en la ecuación. Así, la ecuación: $x + 6 = 24$ es una ecuación de primer grado, porque el mayor exponente de x es 1. La ecuación: $2x^2 - 4x + 12 = 0$ es una ecuación de segundo grado, porque el mayor exponente de x es 2.

Resolver una ecuación consiste en hallar el valor o los valores de las incógnitas que cumplan la igualdad.

2.1 Principios fundamentales de las ecuaciones

- Si a los dos miembros de una ecuación se suma, o resta, una misma cantidad, se conserva la igualdad.

$$\text{Si } a = b \Rightarrow a + 1 = b + 1 \quad a = b \Rightarrow a - 1 = b - 1$$

- Si los dos miembros de una ecuación se multiplican, o dividen, por una misma cantidad, se conserva la igualdad.

$$\text{Si } a = b \Rightarrow a \times 6 = b \times 6 \quad a = b \Rightarrow \frac{a}{6} = \frac{b}{6}$$

- Si los dos miembros de una ecuación se elevan a una misma potencia, o se les extrae la misma raíz, se conserva la igualdad.

$$\text{Si } a = b \Rightarrow a^2 = b^2 \quad a = b \Rightarrow \sqrt{a} = \sqrt{b}$$

Ejemplo 0.1

- Hallar el valor de x en la siguiente ecuación: $5x - 8 = 2x + 3$.

Haciendo transposición de términos se agrupan los semejantes:

$$5x - 2x = 3 + 8 \Rightarrow 3x = 11 \Rightarrow x = \frac{11}{3}$$

- Desarrollar la siguiente ecuación: $\frac{x}{5} + \frac{3x}{4} - x = 6x - 40$.

Un primer procedimiento consiste en reducir todos los términos a un común denominador por medio del m.c.m. Para este ejercicio el m.c.m se puede hallar por simple inspección y es igual a 20.

$$\text{La ecuación quedaría: } \frac{4x}{20} + \frac{15x}{20} - \frac{20x}{20} = \frac{20(6x - 40)}{20} \Rightarrow \frac{-x}{20} = \frac{20(6x - 40)}{20}$$

Desarrollando la ecuación, se tiene: $-x = 20(6x - 40) \Rightarrow -x = 120x - 800$

$$\text{Agrupando términos comunes, se tiene: } 121x = 800 \Rightarrow x = \frac{800}{121} = 6.61$$

El segundo procedimiento consiste en convertir cada quebrado en número decimal:

$$\frac{x}{5} = \frac{1}{5}x = 0.20x \quad \frac{3x}{4} = \frac{3}{4}x = 0.75x$$

La ecuación queda: $0.20x + 0.75x - x = 6x - 40$.

Agrupando términos semejantes: $6x - 0.20x - 0.75x + x = 40 \quad 6.05x = 40$.

$$x = \frac{40}{6.05} = 6.61$$

- Hallar el valor de x en la siguiente ecuación: $\frac{(2x + 12)}{1.3456} - \frac{4x}{1.2326} = 5x$

En Matemáticas Financieras, por lo general, se trabaja con ecuaciones fraccionarias de primer grado en las que el denominador es un número decimal. En estos casos se recomienda convertir cada fracción en un número decimal y desarrollar la ecuación siguiendo el segundo procedimiento del ejemplo anterior.

Analicemos cada fracción en forma independiente:

El término $\frac{(2x + 12)}{1.3456}$ lo podemos asimilar como el resultado de sumar dos quebrados de igual denominador, por lo tanto, se puede descomponer de la siguiente forma:

$$\frac{(2x + 12)}{1.3456} = \frac{2x}{1.3456} + \frac{12}{1.3456}$$

La ecuación quedaría de la siguiente forma: $\frac{2x}{1.3456} + \frac{12}{1.3456} - \frac{4x}{1.2326} = 5x$

Convertiendo los quebrados en números decimales, se tiene:

$$1.4863x + 8.9179 - 3.2452x = 5x$$

Agrupando términos semejantes, se tiene: $5x - 1.4863x + 3.2452x = 8.9179$

$$6.7589x = 8.9179 \Rightarrow x = \frac{8.9179}{6.7589} = 1.3194$$

Sustituyendo en la ecuación x por 1.3194, se comprueba la igualdad.

$$\frac{(2 \times 1.3194 + 12)}{1.3456} - \frac{4 \times 1.3194}{1.2326} = 5 \times 1.3194 \Rightarrow 10.8790 - 4.2817 = 6.5970$$

3. Potenciación

Una potencia es el resultado de multiplicar una cantidad por sí misma dos o más veces. Así, por ser $5 \times 5 = 25$, resulta que 25 es una potencia de 5; por ser $2 \times 2 \times 2 = 8$, el 8 es una potencia de 2. La potencia se designa indicando el número de veces que se usa el factor. En $5 \times 5 = 25$, como el 5 se usa dos veces como factor, se dice que 25 es la segunda potencia de 5. En el caso de $2 \times 2 \times 2 = 8$, el 8 es la tercera potencia de 2. También se dice que 5 está elevado a la segunda potencia, y en forma análoga, que 2 está elevado a la tercera potencia.

Para evitar escribir el producto de factores como: $5 \times 5 = 25$, $2 \times 2 \times 2 = 8$, la elevación a potencias se indica escribiendo el número que se desea elevar, llamado *base*, con un número más pequeño encima y a la derecha, llamado *exponente*, el cual indica el número de veces que se debe multiplicar la base por sí misma. Así, en $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, el 2 es la base, el 3 es el exponente que indica el número de veces que se debe multiplicar el 2 por sí mismo y el 8 es la potencia. Los exponentes no se deben confundir con los factores. Así, 5^2 no significa $5 \times 2 = 10$, sino $5 \times 5 = 25$.

En la práctica se acostumbra designar la segunda potencia de un número como *cuadrado* y la tercera potencia como *cubo*, de tal forma que:

$$a^2 = a \text{ elevado al cuadrado} \quad a^3 = a \text{ elevado al cubo}$$

Para otras potencias no existen nombres análogos correspondientes.

3.1 Operaciones con potencias

- *Producto de potencias de igual base*

Para multiplicar potencias de igual base, se coloca la misma base y se suman los exponentes.

Ejemplo 0.2

$$a^5 \times a^4 = a^{5+4} = a^9 \quad (1+i) \times (1+i)^2 = (1+i)^{1+2} = (1+i)^3 \quad 3^5 \times 3^2 = 3^7$$

- *Producto de potencias de igual exponente y distinta base*

Para multiplicar potencias de igual exponente y distinta base, se coloca como base el producto de las bases y por exponente el mismo.

Ejemplo 0.3

$$3^2 \times 4^2 = (3 \times 4)^2 \quad a^m \times b^m = (a \times b)^m$$

- *Cociente de potencias de igual base*

Para dividir potencias de la misma base, se pone la misma base y se restan los exponentes.

Ejemplo 0.4

$$\frac{4^6}{4^3} = 4^{6-3} = 4^3 \quad \frac{a^5}{a^3} = a^{5-3} = a^2 \quad \frac{(1+i)^3}{(1+i)^2} = (1+i)^{3-2} = (1+i)$$

De esta regla provienen el *exponente cero* y el *exponente negativo*.

Exponente cero. Resulta de dividir dos potencias de igual base e igual exponente.

$$\frac{a^2}{a^2} = a^{2-2} = a^0 = 1 \quad \frac{4}{4} = \frac{4^1}{4^1} = 4^{1-1} = 4^0 = 1$$

En efecto, a^2 entre a^2 es igual a 1, y en general, toda cantidad dividida por sí misma es igual a 1.

Exponente negativo. Resulta de dividir dos potencias de la misma base cuando el exponente del dividendo (numerador) es menor que el exponente del divisor (denominador).

$$\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1}$$

El resultado se interpreta de la siguiente forma: toda cantidad elevada a un exponente negativo es igual a un quebrado cuyo numerador es 1 y su denominador es la misma cantidad con el exponente positivo.

$$a^{-1} = \frac{a^2}{a^3} = \frac{a \times a}{a \times a \times a} = \frac{1}{a^1} \Rightarrow a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

- *Cociente de potencias del mismo exponente y diferentes bases*

Para dividir potencias del mismo exponente y diferentes bases, se coloca por base el cociente de las bases y por exponente el mismo.

Ejemplo 0.5

$$\frac{4^3}{5^3} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \quad \frac{a^6}{b^6} = \left(\frac{a}{b}\right)^6$$

- *Potencia de un fraccionario*

Para elevar un número fraccionario a una potencia, se eleva el numerador y el denominador a la potencia.

Ejemplo 0.6

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3} \quad \left(\frac{a}{b}\right)^6 = \frac{a^6}{b^6}$$

Nótese que es el caso contrario al anterior.

- *Potencia de una potencia*

Para elevar una potencia a otra potencia, se coloca por base la misma potencia y por exponente el producto de los exponentes.

Ejemplo 0.7

$$(4^3)^2 = (4)^{3 \times 2} = 4^6 \quad (a^m)^n = (a)^{m \times n} = a^{mn} \quad \left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{9}}$$

- *Cuadrado de la suma o diferencia de dos cantidades*

Elevar al cuadrado $(a + b)$ equivale a multiplicar esta suma por sí misma.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Desarrollando el producto, se tiene: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Análogamente: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Las dos operaciones se pueden agrupar en un enunciado único, diciendo: el cuadrado de una suma o diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, más el cuadrado de la segunda, más o menos el doble de la primera cantidad por la segunda.

- *Diferencia de cuadrados*

Resulta de multiplicar la suma de dos cantidades por su diferencia.

Si desarrollamos $(a + b)(a - b)$, se obtiene: $a^2 - b^2$

3.2 Operaciones inversas de la potenciación

Así como la resta es la operación inversa de la suma y la división es la inversa de la multiplicación, la potenciación tiene dos operaciones inversas: *radicación* y *logaritmación*.

En la igualdad: $2^3 = 8$ figuran tres números: el 2, llamado *base*; el 3, llamado *exponente* y el 8 que es la *potencia*. Conocidos dos de estos tres números existe una operación que permite determinar el tercero. Los casos que se pueden presentar son los siguientes:

- *Conocida la base y el exponente, determinar la potencia*

Esta operación se llama *potenciación* y se considera una operación directa. La base y el exponente son los datos conocidos y la potencia es el resultado de la operación. Esta operación ya fue resuelta en los párrafos anteriores.

- *Conocida la potencia y el exponente, determinar la base*

Esta operación se llama *radicación*.

$$\text{Si se tiene: } 2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$

La potencia conocida, el 8, se llama *radicando*, el exponente conocido, el 3, se llama *índice*, la base desconocida se llama *raíz* y el símbolo $\sqrt{}$ se llama *radical*. Para el ejemplo, se dice que 2 es la raíz tercera de 8, o también, 2 es la raíz cúbica de 8. En la práctica se omite el índice cuando la raíz es cuadrada.

$$\sqrt[3]{4} = \sqrt{4}$$

- *Conocida la potencia y la base, determinar el exponente*

Esta operación se llama *logaritmación*, pero bien podría llamarse *exponenciación*, porque la incógnita es el exponente.

La base y la potencia son los datos conocidos y se pide determinar el exponente. El exponente que hay que hallar se llama *logaritmo* de la potencia con base dada.

Para el ejemplo, la operación se indica así: $3 = \text{Log}_2 8$ (léase: tres igual al logaritmo de ocho en base 2).

La potenciación tiene dos operaciones inversas (radicación y logaritmación) en lugar de una, como ocurre para la suma y la multiplicación. Esto es así, debido a que en la potenciación la base y el exponente no siempre son comutables, como sí lo son los sumandos en la suma y los factores en la multiplicación.

Así, por ejemplo: en la suma: $a + b = b + a$

en la multiplicación: $a \times b = b \times a$

en la potenciación: $a^b \neq b^a$

En la potenciación hay casos en que el exponente se puede permutar por la base, pero esta condición no siempre se cumple. $2^4 = 4^2 = 16$, pero $3^2 = 9$ es diferente a $2^3 = 8$.

Radicación

La raíz de una cantidad es toda cantidad que elevada a una potencia nos da la primera cantidad.

Como $2^3 = 8$, el 2 es la raíz cúbica de 8, porque 2 elevado al cubo es igual a 8, por lo tanto, se puede plantear la siguiente notación:

$$2^3 = 8 \Rightarrow \sqrt[3]{8} = 2$$

En la expresión anterior, el 2 es la raíz, el 8 es el radicando (potencia) y el 3 es el grado o índice del radical.

Operaciones con radicales

- *Supresión del índice y el exponente*

Cuando el exponente del radicando es igual al índice de la raíz, ambos se suprimen.

Ejemplo 0.8

$\sqrt[4]{8^4} = 8$, porque el índice y el exponente de la potencia son iguales y se anulan.

$\sqrt[3]{(1+i)^3} = (1+i)$, por la misma razón del ejemplo anterior.

- *Raíz de una potencia*

La raíz de una potencia es igual a la potencia elevada a un quebrado cuyo numerador es el exponente de la potencia y el denominador es el índice de la raíz.

Ejemplo 0.9

$$\sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} \quad \sqrt{(1+i)^2} = (1+i)$$

El tercer ejemplo hace más explícito el caso de supresión de índice y exponente, expuesto en el caso anterior:

$$\sqrt{(1+i)^2} = (1+i)^{\frac{2}{2}} = (1+i)^1 = (1+i)$$

La regla de la raíz de una potencia da origen al exponente fraccionario, que proviene de extraer una raíz a una potencia cuando el exponente del radicando no es divisible por el índice de la raíz.

En el caso $\sqrt{(1+i)^2} = (1+i) = (1+i)$, el exponente del radicando, 2, es divisible por el índice de la raíz que es también 2. Pero cuando el exponente no es divisible por el índice, hay que dejar indicada la división y se origina el exponente fraccionario.

$$\sqrt{b} = b^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt{(1+i)} = (1+i)^{\frac{1}{2}} \quad \sqrt[3]{(1+i)^2} = (1+i)^{\frac{2}{3}}$$

- *Raíz de otra raíz*

Para extraer una raíz a un radical, se multiplica el índice del radical por el índice de la raíz.

Si se tiene: $\sqrt{\sqrt{a}} = \left(\left(a^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{1}{4}}$, que es la aplicación, también, de la potencia de una potencia.

Ejemplo 0.10

$$\sqrt[3]{\sqrt{(1+i)}} = (1+i)^{\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}} = (1+i)^{\frac{1}{12}} \quad \sqrt[3]{\sqrt[3]{(1+i)^4}} = (1+i)^{\frac{1}{2} \times \frac{4}{3}} = (1+i)^{\frac{4}{6}} = (1+i)^{\frac{2}{3}}$$

- *Raíz de un quebrado*

La raíz de un quebrado se obtiene hallándole la raíz a sus dos términos.

Ejemplo 0.11

$$\sqrt{\frac{4}{15}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{15}} = \frac{2}{\sqrt{15}} \quad \sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{5^{\frac{1}{3}}}{8^{\frac{1}{3}}}$$

4. Logaritmos

Los logaritmos, una de las contribuciones más geniales a las matemáticas, fueron inventados por el escocés John Napier o Neper, Barón de Merchiston, en el año 1614, aproximadamente. Por medio de los logaritmos pueden abreviarse y simplificarse muchísimo un gran número de los cálculos aritméticos ordinarios, sobre todo cuando los números de que se trata son números enteros o fraccionarios que constan de muchas cifras. En los primeros tiempos de las matemáticas todos esos cálculos se hacían aplicando los métodos ordinarios y exigían enormes cantidades de tiempo y trabajo. Así, las operaciones de multiplicación, división, extracción de raíces y la elevación a potencias se convierten en simples sumas y restas, multiplicaciones y divisiones de logaritmos. Por esta razón, los logaritmos tuvieron un éxito inmediato. Actualmente, con la aparición de las calculadoras electrónicas, los logaritmos como instrumentos de cálculo han perdido importancia; pero, aún así, tienen amplia aplicación en economía, astronomía, finanzas, etc.

El *logaritmo* es el exponente al que hay que elevar una cantidad positiva, llamada *base*, para obtener un número determinado, llamado *potencia*. El vocablo logaritmo, proviene del griego *logos*, que significa calcular, y *arithmos* que quiere decir número. Por lo tanto, *logaritmo* significa número para calcular.

Matemáticas financieras aplicadas

Las Matemáticas financieras aportan procedimientos matemáticos a la luz del principio del valor del dinero en el tiempo, que resuelven diversas operaciones financieras y comerciales cotidianas (préstamos bancarios, créditos comerciales y de vivienda, valoración de activos financieros, cálculo de indicadores de rentabilidad, equivalencia de tasas de interés, etc.).

Esta edición hace énfasis en la aplicación de la Ecuación de valor o de equilibrio financiero, para resolver las operaciones financieras caracterizadas por tener ingresos y egresos. El capítulo 4 fue actualizado a fin de ajustar a la realidad financiera colombiana los conceptos y denominaciones de las tasas de interés (tasa nominal, tasa periódica y tasa efectiva anual, y sus relaciones).

El texto está dirigido a estudiantes, empresarios y profesionales interesados en conocer los procedimientos de cálculos financieros.

Colección: Ciencias empresariales

Área: Contabilidad y finanzas

ECOE
EDICIONES

www.ecoediciones.com

Incluye

- Uso de herramienta *Buscar objetivo de Excel*, para resolver Ecuaciones de valor.
- Aplicativo de conversión de tasas de interés, para hacer equivalencia de intereses.
- Solucionario de ejercicios.

Jhonny de Jesús Meza Orozco

Ingeniero en Transportes y Vías de la UPTC. Especialista en Finanzas y en Gestión Gerencial de la U. de Cartagena. Profesor del área de Matemáticas Financieras y Evaluación Financiera de Proyectos de la U. Popular del Cesar y de postgrado en el área financiera de las universidades Popular del Cesar, de Cartagena, del Norte, del Sinú, de la Guajira, CECAR, de Sucre y Tecnológica de Bolívar. Autor de *Evaluación Financiera de Proyectos y Valoración de Instrumentos Financieros en NIIF para Pymes*.

ISBN 978-958-771-493-7



e-ISBN 978-958-771-494-4