Solón Efrén Losada H.
Jorge Morales P.
Carlos Fabián Ruiz P.

MÉTODOS NUMÉRICOS

ECOE
EDICIONES

CONTENIDO

ÍNDICE DE GRÁFICAS

ÍNDICE DE TABLAS

SÍMBOLOS

ε_a	Error absoluto.
ε_r	Error relativo.
$\varepsilon_{r\%}$	Error relativo porcentual.
$\{x_n\}$	Sucesión.
EN	Error normalizado.
ENn	Término -ésimo del error normalizado.
ENP	Error normalizado porcentual.
Tm	Tolerancia con *m* cifras significativas.
s_n	Suma parcial de una serie.
$\boldsymbol{R_n}(\xi)$	Error *n*-ésimo evaluado en ξ.
bi	Aproximación *i*-ésima aplicando el método de bisección.
rfi	Aproximación *i*-ésima aplicando el método de regla falsa.
$\boldsymbol{a_n x^n}$	Término *n*-ésimo de un polinomio.
(ρ, ρ)	Intervalo donde se encuentran las raíces de un polinomio.
Vp (c)	Número de cambios de signo del valor *c*, evaluado en las sucesiones de Sturm.

Ii	Intervalo donde se garantiza una única raíz.
$\boldsymbol{\beta_i}$	Parámetros de los modelos de regresión.
ei	Error *i*-ésimo generado por un modelo de regresión.
$\vec{\Delta}\boldsymbol{f}$	Primera diferencia finita hacia adelante.
$\boldsymbol{Dom_X(f)}$	Valores que puede tomar la función *f* en un conjunto de valores X.
$\vec{\Delta}^{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{f}\ \boldsymbol{n}$	-ésima diferencia finita hacia adelante.
$\prod_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_i}$	Productoria de los *n* primeros términos.
$\mathbf{R_i^s}$	Aproximación-*ésima* del valor de la integral utilizando sumas superiores de Riemman.
$\boldsymbol{R_i^I}$	Aproximación-*ésima* del valor de la integral utilizando sumas inferiores de Riemman.
$\boldsymbol{A_i^T}$	Aproximación-*ésima* del valor de la integral utilizando el método del trapecio.
$\boldsymbol{M_T}$	Cota superior para acotar el error utilizando trapecios.
$\boldsymbol{E_n^T}$	Iteración -*ésima* del error del método del trapecio.
$\boldsymbol{A_i^s}$	Aproximación-*ésima* del valor de la integral utilizando el método de Simpson.
$\boldsymbol{A_i^B}$	Aproximación-*ésima* del valor de la integral utilizando el método de Boole.
$\boldsymbol{R_{k,j}}$	Fórmula de recurrencia de aproximación de Romberg de la fila *i*, columna *j*.
$\boldsymbol{O(h^n)}$	Error -*ésimo* generado al utilizar un método de aproximación.
$\frac{\overrightarrow{df}}{dx}(\boldsymbol{x_k})$	Aproximación de la derivada en x_k, utilizando diferencias hacia adelante.

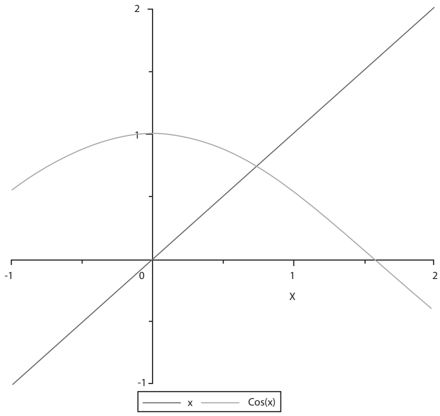
INTRODUCCIÓN

Debemos aclarar que las presentes notas son producto de los cursos de métodos numéricos dictados durante varios años y no pretende ser un libro formal de métodos numéricos, más bien, sirve como complemento a libros conocidos. Por ello, se tratará de dar un enfoque un poco diferente en un lenguaje más cotidiano.

La matemática actual cuenta con diferentes teorías y métodos para hallar soluciones a diversos problemas y, además, con un lenguaje propio que permite expresar diferentes conceptos de manera concisa y precisa, sin embargo, este lenguaje muchas veces resulta insuficiente para ciertos propósitos o los métodos actuales no solucionan completamente los problemas que se puedan presentar, mostremos primero dos hechos que ilustran estas afirmaciones.

En primer lugar, uno de los problemas más frecuentes en matemáticas es encontrar soluciones reales a ecuaciones, sin embargo existen ecuaciones que, a pesar de ser muy sencillas de escribir en el lenguaje matemático como $x\text{-}cos(x)=0$, no se pueden resolver analíticamente (con las técnicas convencionales), aunque gráficamente se ve que en efecto tienen solución (ya que es la intersección de las gráficas de x y $cos(x)$).

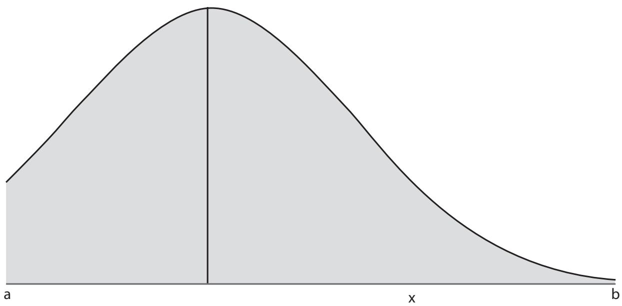
Gráfica 0.1 *cos x = x*



Fuente: elaboración propia

En un segundo ejemplo, para calcular valores de integrales definidas usamos el teorema fundamental del cálculo (TFC), el cual nos permite relacionar las antiderivadas de la función con el valor de la integral, sin embargo, hay situaciones en las cuales estas antiderivadas no se pueden expresar como combinación de funciones elementales (las comúnmente conocidas); uno de estos casos se presenta al buscar la probabilidad de una variable aleatoria que tenga una distribución normal, ya que para esto nos vemos enfrentados a calcular la integral definida $\int_a^b e^{-x^2}dx$ y, por tanto, se necesita una antiderivada de la función e^{-x^2}, la cual no puede ser expresada por medio de funciones polinómicas, radicales, exponenciales, logarítmicas ni una combinación de ellas mediante el álgebra de funciones. Aunque el problema claramente tiene solución, dado que es el área bajo la curva de una función continua sobre un intervalo acotado (Apostol, 1996), lo cual gráficamente es

Gráfica 0.2 Distribución normal



Fuente: elaboración propia.

El objetivo de estas notas es describir brevemente algunos métodos numéricos (y en algunos casos ver qué motivó a desarrollarlos), es decir, buscar soluciones aproximadas de problemas que no pueden ser resueltos con los métodos analíticos conocidos (ya que si fuera esto posible no tendríamos la necesidad de crear una aproximación de la solución), por lo tanto no buscamos las soluciones exactas de dichos problemas (es imposible), pero tratamos de dar aproximaciones bastante "buenas" de estas. Y aquí, ya nos enfrentamos al primer problema o característica de los métodos numéricos: **nunca solucionaremos un problema de manera exacta**, solo estamos dando aproximaciones, tratando de controlar o medir el margen de error que aparece en la ejecución de los procesos utilizados.

Por las razones antes mencionadas, empezamos nuestro primer capítulo con un estudio breve de la teoría del error y damos una definición alterna de tolerancia, la cual puede ser usada al aprovechar la potencia de las máquinas actuales que nos permiten trabajar con bastantes cifras significativas, lo cual da un criterio para verificar si los métodos numéricos recursivos (es decir, que usan un algoritmo recursivo) son lo suficientemente "buenos" para ser tenidos en cuenta e implementarlos. El segundo capítulo está dedicado a un repaso de las series y al teorema de Taylor desde el punto de vista numérico, el cual es parte fundamental del desarrollo de la mayoría de los métodos numéricos.

En el tercer capítulo, discutimos uno de los problemas más comunes en matemáticas, como lo es la resolución de ecuaciones reales, tal y como fue mostrado en el primer ejemplo de esta introducción.

En el cuarto capítulo, dado que las funciones más naturales para nosotros son los polinomios, dedicamos la última parte de este capítulo a encontrar las raíces de ecuaciones polinómicas y damos un algoritmo completo para aproximar las raíces reales de estas ecuaciones, el cual no se encuentra completo en la bibliografía actual (como parte opcional se aproximarán las raíces complejas).

Para el quinto capítulo, estudiamos el ajuste de curvas (funciones), empezamos por el método de mínimos cuadrados y lo estudiamos teóricamente como un problema de minimización de la norma del vector error, para después comparar explícitamente el método teórico a funciones no polinomiales con las regresiones lineales aplicadas a linealizaciones de los modelos y mostrar sus diferencias. En segundo lugar, se muestra la forma de construir un polinomio de interpolación de manera sencilla y natural, haciendo uso únicamente del teorema del factor.

En el capítulo sexto, nos dedicamos al cálculo en una variable al comenzar por la integración (orden histórico) y centrándonos en los métodos y errores de los métodos de Newton-Cotes, los cuales son simplemente aplicación de la interpolación polinomial.

En el capítulo séptimo usaremos el teorema de Taylor para llegar a aproximaciones de la derivada (al mostrar explícitamente el desarrollo de estas fórmulas) y las escribiremos de manera simplificada, al hacer uso de las diferencias finitas divididas; especificando su error $O(h)$.

CAPÍTULO 1

TEORÍA DEL ERROR

Como ya se mencionó en la introducción, el propósito de estas notas es buscar soluciones aproximadas a problemas que no pueden ser resueltos con los métodos analíticos conocidos y, dado que se va a trabajar con aproximaciones, es necesario saber si efectivamente estas son cercanas a la solución real del problema y, si lo son, qué tan "buenas" son.

Para esto, se hará un breve estudio de la teoría del error y se centrará en la precisión, ya que la mayoría de los métodos que se estudiarán en estas notas son recursivos.

Es de destacar, que el término "error" se usará para representar tanto la inexactitud como la imprecisión en los cálculos numéricos. Hecha esta aclaración, se analizarán los factores que contribuyen al error.

1.1 Tipos de error

1.1.1 Experimental

Al momento de medir las variaciones de algún evento, se debe ser cuidadoso de no producir perturbaciones en el sistema que está bajo observación. Por ejemplo, para medir la temperatura de un cuerpo, este se debe colocar en contacto con un termómetro, pero al ponerlos juntos algo de energía (calor) se intercambia (transfiere) entre el objeto y el termómetro, generando un cambio en la temperatura del cuerpo que deseamos medir. Así, el instrumento de medición afecta el resultado de la medida.

Además, es necesario tener en cuenta que todas las medidas están afectadas en algún grado por un error experimental, debido a las imperfecciones inevitables tanto del instrumento de medida como de las limitaciones impuestas por los sentidos al registrar la información.

1.1.2 Error de máquina

Teóricamente, se tiene la existencia de números reales con una cantidad infinita de cifras decimales (por ejemplo, π), sin embargo, en los cálculos con computadores es imposible manejar una cantidad de información infinita. Por ejemplo, el resultado de multiplicar dos números con cuatro cifras decimales es en general un número con ocho cifras decimales, pero si se tienen que efectuar varias multiplicaciones sucesivas, en algunos momentos será imposible manejar una larga cantidad de cifras decimales.

El computador solo utiliza números con una cantidad finita de cifras, de modo que los cálculos se realizan únicamente con representaciones aproximadas de los números exactos. En un computador, solo se usa un subconjunto relativamente pequeño del sistema de números reales para representarlos a todos, este conjunto es el conocido como los puntos flotantes, por ejemplo: $3153{,}07 = 3{,}15307 * 10^3$

Para estudiar las causas del error con algo de profundidad, el lector se puede dirigir al anexo 1 (números de máquina). Otro inconveniente es el sistema numérico de los computadores actuales: el sistema numérico en base dos o binario. Desde luego, esto no impide que la comunicación con el computador se haga en el sistema decimal (base 10), con el cual estamos familiarizados, sin embargo, se tiene cierto grado de pérdida en la información, ya que el computador debe con estos dos sistemas convertir la información.

1.1.3 Exactitud

Se refiere a la aproximación de un número o de una medida al valor verdadero que se supone representa.

1.1.3.1 Error absoluto

Se da cuando se aproxima el valor real a un valor aproximado.

Mídase la distancia entre ellos (se notará que el error absoluto es una distancia siempre mayor o igual a cero).

Definición 1.1 (error absoluto). Se define el error absoluto de una aproximación como la distancia entre este $\boldsymbol{x}$ y el valor real $\tilde{x}$. Así:

$$\textbf{(1.1)} \quad \varepsilon_a = |\tilde{x} - \boldsymbol{x}|$$

Donde $\tilde{x}$ es el valor aproximado y $\boldsymbol{x}$ es el valor verdadero (Nieves, 1998).

Ejemplo 1.1. Suponer que por medio de un experimento de laboratorio se quiere medir la aceleración de la fuerza de la gravedad y el resultado es:

$$\tilde{x} = 10.1\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Este sería el valor aproximado, tomando el valor "real" como $x = 9.81\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ se tiene que el error absoluto es:

$$\varepsilon_a = \left|10.1\frac{m}{s^2} - 9.81\frac{m}{s^2}\right| = 0.29\frac{m}{s^2}$$

Ejemplo 1.2. Suponer que se tiene que medir la longitud de un puente y la de un remache, se obtiene **9.999 cm** y **9 cm** respectivamente. Si los valores son **10.000 cm** y **10 cm**, ¿cúal es el error absoluto en cada caso? El error absoluto en la medición del puente sería:

$$\varepsilon_a = \left|\tilde{x} - x\right| = \left|10.000\,cm - 9.999\,cm\right| = 1\,cm$$

Y para el remache:

$$\varepsilon_a = \left|\tilde{x} - x\right| = \left|10\,cm - 9\,cm\right| = 1\,cm$$

Uno de los problemas al considerar el error absoluto es que este depende de las unidades. Así, en el ejemplo anterior el error de 1 cm es igual para los dos experimentos, sin embargo, a pesar de que el error absoluto es el mismo, en el segundo experimento la experiencia nos dice que es "más grande" con respecto a lo que se mide, por esta razón, es bueno comparar el error con respecto a lo que se está midiendo, además, es bueno que el error sea independiente de la escala usada. Estas consideraciones motivan la siguiente definición.

1.1.3.2 Error relativo

Definición 1.2 (error relativo). Se define el error relativo como la razón entre el error absoluto y la magnitud del valor verdadero y se denota por:

$$\textbf{(1.2)}\quad \varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{|x|} = \left|\frac{\tilde{x} - x}{x}\right|$$

Siempre y cuando el valor real de x sea no nulo (en cuyo caso es suficiente trabajar con el error absoluto) (Burden y Faires, 2003, y Nieves, 1998).

Ejemplo 1.3. Calcular los errores relativos de los experimentos del ejemplo 1.2 de la sección anterior (el puente y el remache).

El error relativo en la medición del puente es:

$$\varepsilon_r = \left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| = \left|\frac{10.000\,cm - 9.999\,cm}{10.000\,cm}\right| = 0{,}0001$$

Y para el remache es:

$$\varepsilon_r = \left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| = \left|\frac{10\,cm - 9\,cm}{10\,cm}\right| = 0{,}1$$

Obsérvese que esta medida del error es un escalar (es un número independiente de las unidades), el cual muestra que el error en el experimento del remache es más grande que el del puente en su contexto. Estos valores, en realidad, son partes de los valores reales, es decir, el error cometido al medir el remache es la 0,1 parte total de lo que mide el remache, lo cual puede ser mejor explicado en términos de porcentajes, lo cual motiva una variación de la definición anterior.

1.1.3.2.1 Error relativo porcentual

Definición 1.3 (error relativo porcentual). Defínase el error relativo porcentual como el porcentaje entre el error absoluto y la magnitud del valor verdadero, se denota por:

$$\textbf{(1.3)}\quad \varepsilon_{r\%} = \frac{\varepsilon_a}{|x|} * 100\% = \left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| * 100\%$$

Siempre y cuando el valor real sea no nulo (Burden y Faires, 2003).

Ejemplo 1.4. Calcular los errores relativos porcentuales del ejemplo 1.2 (el puente y el remache).

El error relativo porcentual en la medición del puente es:

$$\varepsilon_{r\%} = \left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| * 100\% = \left|\frac{10.000\,cm - 9.999\,cm}{10.000\,cm}\right| * 100\% = 0{,}01\%$$

Y para el remache es:

$$\varepsilon_{r\%} = \left|\frac{\tilde{x}-x}{x}\right| * 100\% = \left|\frac{10\,cm - 9\,cm}{10\,cm}\right| * 100\% = 10\%$$

A pesar de las definiciones anteriores, estas no pueden ser usadas en las notas, ya que ellas recurren al uso del valor real. Existen dos problemas con el valor real, el primero es que no se tiene (si se conoce no hay necesidad de aplicar métodos numéricos) y el segundo es que se conoce, pero numéricamente no se entiende (por ejemplo $\sqrt{2}$).

Esto crea una necesidad de trabajar de un modo diferente el error, para esto se estudiará la precisión.

1.1.4 Precisión

Se refiere a qué tan cercano está un valor individual medido o calculado con respecto a otros valores medidos.

En la mayoría de métodos numéricos que se desarrollarán, se tratará de acercar a algún valor (ya sea solución de una ecuación, valor de una integral, etc.), esto se hará de forma recurrente, es decir, se da una primera aproximación y basándose en esta se dará una segunda y así sucesivamente, esto lleva al estudio de las sucesiones.

1.1.4.1 Sucesiones y series

Definición 1.4 (sucesión). Por una sucesión finita de ***n*** términos, se entenderá una función **F**, cuyo dominio sea el conjunto de números **{1, 2, …, *n*}**, e infinita cuando el dominio sea el conjunto **{1, 2, 3, …}** de todos los enteros positivos (o conjunto contable y totalmente ordenado) (Muñoz Quevedo, 2002).

El recorrido de "F", esto es el conjunto **{F(1),F(2),F(3),…}**, se designa también por $\{\mathbf{F_1}, \mathbf{F_2}, \mathbf{F_3}, \ldots\}$ y el valor $\mathbf{F_n}$ se llama al término *n-ésimo* de la sucesión, usualmente la sucesión se denota por $(\boldsymbol{x_n})$ o $(\boldsymbol{a_n})$.

Ejemplos de sucesiones:

- Números primos 2, 3, 5, 7, 11, …
- Sucesión de Fibonacci: $\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \end{cases}$

La idea es que estas sucesiones se acerquen al valor buscado, así se estudiará a las sucesiones convergentes.

Definición 1.5 (sucesión convergente) (Apostol, 1996). Sea $(\boldsymbol{x_n})$ una sucesión en los reales, se dice que converge a un valor **L** si y solo si dado ε > 0 existe un N ∈ℕ tal que:

$$\left| x_n - L \right| < \varepsilon$$

Siempre que ***n*** > **N.**

Para ilustrar esta definición, véase el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1.5. Considerar la sucesión de números reales dada por:

$$x_n = \frac{3n}{7n+3}$$

Se sabe por los cálculos directos del límite que:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{3n}{7n+3} = \frac{3}{7}$$

Ahora, la definición anterior dice que si se va "adelante" en la sucesión, estos valores van a ser muy cercanos al valor del límite $L = \frac{3}{7}$.

Tabla 1.1 Sucesión ejemplo 1.5

n	x_n	$\lvert x_n - L \rvert$
1	0,3	0,1285714286
2	0,352941176	0,0756302521
3	0,375	0,0535714286
4	0,387096774	0,0414746544
1.000	0,428387834	0,0001835948
1.000.000	0,428571245	0,0000001837

Fuente: elaboración propia.

En muchas de las aproximaciones numéricas, hay acercamiento a la solución por medio de sucesiones, las cuales se esperan sean convergentes. La definición de sucesión convergente da un criterio para verificar la convergencia, sin embargo, esta recurre al uso del valor límite de la sucesión, el cual no se conoce (ni se conocerá). Retómese el ejemplo anterior y utilícense las ideas de Cauchy. En la tTabla 1.2 Distancia entre dos elementos de la sucesión se compara la distancia de un elemento de la sucesión y el siguiente, así:

Tabla 1.2 Distancia entre dos elementos de la sucesión

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1} \rvert$
1	0,3	0,05294117647059
2	0,352941176	
2	0,352941176	0,02205882352941
3	0,375	

3	0,375	0,01209677419355
4	0,387096774	
1.000	0,428387834	0,0000001833328818
10.001	0,428553064	
1.000.000	0,428571245	0,0000000000004286
1.000.001	0,428571245	

Fuente: elaboración propia.

En la tabla anterior se ve que entre más se avanza en la sucesión, la distancia entre cada par de términos es más pequeña. Esto motiva la siguiente definición, la cual es muy útil.

Definición 1.6 (sucesiones de Cauchy) (Apostol, 1996). Sea x_n una sucesión se llama sucesión de Cauchy, $\varepsilon > 0$ si y solo si dado $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$, existe tal que:

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

Siempre que n, $m > \mathrm{N}$.

Es decir, entre más adelante vaya la sucesión, la distancia entre los números va a ser más pequeña.

De la anterior definición, se sigue la siguiente propiedad de las sucesiones de Cauchy para términos consecutivos:

Propiedad 1.1. Si x_n es una sucesión de Cauchy, entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$$

Siempre que $n > \mathrm{N}$.

Para ilustrar esta definición, véase el ejemplo 1.5, una sucesión convergente es una sucesión de Cauchy, sin embargo, es bien sabido que el recíproco se cumple bajo ciertas condiciones, es decir, se cumple el siguiente teorema:

Teorema 1.1. En $\mathbb{R}^n$, toda sucesión de Cauchy converge.

La demostración se puede ver (Rudin, 1976).

La definición de sucesión de Cauchy, en particular las definiciones 1.1 y 1.6, permite determinar cuándo una sucesión en los números reales es convergente sin hacer uso del valor del límite, el cual no se puede usar, ya que se desconoce. Esta definición permite crear una medición para el error en una sucesión que calcule las distancias entre dos elementos diferentes de una sucesión, sin embargo, como se vio en el error absoluto, esto no representa una buena cuantificación del error.

Se hará uso de las ideas expuestas en la definición 1.2, para llegar a una mejor medición del error dentro de una sucesión. Para esto, la idea es comparar las distancias entre dos términos consecutivos con respecto al valor real, lo que sería:

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{L}\right|$$

Pero es ilógico trabajar con el valor real, así que el mejor candidato para asumir este papel es el último término calculado en la sucesión, es decir x_n, esto lleva a la siguiente definición.

1.1.4.2 Error normalizado

Definición 1.7 (error normalizado). Sea (x_n) una sucesión, se define el error normalizado como la sucesión EN=(EN_n) dada por:

$$\textbf{(1.4)}\quad EN_n = \left|\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n}\right|$$

Para n = 2, 3, ... (Burden y Faires, 2003).

Para que una sucesión sea de Cauchy es necesario (más no suficiente) que la sucesión *EN* tienda a cero.

Esto da una forma de ver si una sucesión posiblemente es convergente sin el uso del valor del límite, es decir, si $EN_n \to 0$ la sucesión posiblemente será convergente.

Ejemplo 1.6. Para ilustrar esta definición, véase el siguiente ejemplo:, si una sucesión es de Cauchy $EN \to 0$, la sucesión $a_n = \frac{3n}{7n+3}$ se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1.3 Ejemplo 1.6

n	a_n	EN_n
1	0,3	---------
2	0,352941176	0,15000000000000
3	0,375	0,05882352941176
4	0,387096774	0,03125000000000
1.000	0,428387834	
1.001	0,428388017	0,00000042795987

Fuente: elaboración propia.

Recuérdese que en muchas ocasiones es más claro hablar en términos de porcentajes, por lo cual será más utilizado el error normalizado porcentual, el cual será definido a continuación.

1.1.4.2.1 Error normalizado porcentual

Definición 1.8 (error normalizado porcentual). Sea (x_n) una sucesión, se define el error normalizado porcentual como la sucesión ENP = (ENP_n) dado por:

$$ENP_n = \left| \frac{x_n - x_{n-1}}{x_n} \right| * 100\%$$

Para n = 2, 3, ..., (Nieves, 1998, y Burden y Faires, 2003).

Al igual que en la definición 1.7, si una sucesión es convergente, entonces: ENPn→0

Cuando $n \to \infty$ (ver ejemplo 1.6).

Ahora se ilustrará el uso del error normalizado y normalizado porcentual en una sucesión a fin de analizar su posible convergencia.

Ejemplo 1.7. Considerar la siguiente sucesión definida por recurrencia:

$$x_0 = 1$$

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)!} \quad \textbf{(1.5)}$$

Calcular los primeros 11 términos de la sucesión junto con los errores de normalizado y normalizado porcentual.

Tabla 1.4 Ejemplo 1.7

n	x_n	EN_n	ENP_n
0	1		
1	2	0,5	50,00000000%
2	2,5	0,2	20,00000000%
3	2,66666666666667	0,0625	6,25000000%
4	2,70833333333333	0,015384615	1,53846154%
5	2,71666666666667	0,003067485	0,30674847%
6	2,71805555555556	0,000510986	0,05109862%
7	2,71825396825397	0,0000729927	0,00729927%
8	2,71827876984127	0,0000091240	0,00091240%
9	2,71828152557319	0,0000010138	0,00010138%
10	2,71828180114638	0,0000001014	0,00001014%

Fuente: elaboración propia.

Como se ve en la tabla 1.4, *EN* y *ENP* son sucesiones y tienden hacia cero, esto significa que la sucesión (x_n) es posiblemente de Cauchy y, por lo tanto, posiblemente converge, pero no se sabe a qué valor, incluso, nunca se sabrá a qué valor.

La pregunta natural que se debe hacer es: ¿dónde detengo esta sucesión para tener una "buena aproximación" del límite? Antes de contestar, se necesita dar sentido a la expresión "buena aproximación".

Comúnmente, se usa esta expresión para hablar de cifras decimales, por ejemplo, $\pi \approx 3.14$ es una aproximación de π con dos cifras decimales, pero ¿*cifras decimales* describe bien la magnitud que representa el número?, para esto se consideran las siguientes cantidades.

Ejemplo 1.8. El precio de un carro en el mercado es de 36.280.000, al quitar el IVA del 16% el valor del carro quedaría en:

$$\textbf{(1.6)} \quad x = 31275862{,}06896552$$

Otra cantidad conocida es la décima parte de la unidad de masa atómica de un electrón que es:

$$\textbf{(1.7)} \quad y = 0{,}000054857990946$$

Si se pide una aproximación de estos valores con tres cifras decimales se tendrá $\tilde{x} = 31.275.862{,}069$ $\tilde{y} = 0{,}000$, lo cual no es práctico en ninguno de los casos. En el primero es excesivo trabajar con tres cifras decimales y en el segundo no aporta nada de información acerca de la magnitud del valor, esto lleva a pensar cómo se puede dar una idea clara de la magnitud de un valor.

Esto ya no es un problema gracias a la notación científica, en el ejemplo anterior se tiene $x = 3{,}127586206896552*10^7$, $y = 5{,}4857990946*10^{-5}$, esto muestra que las cifras que realmente son significativas (sin importar la posición de ellas en la representación decimal) son las primeras que aparecen en la representación científica, esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.9 (dígito significativo o cifra significativa). Una cifra significativa es cualquiera de los dígitos 1, 2, 3,…, 9; y 0 es una cifra significativa excepto cuando este es usado para fijar el punto decimal o para llenar los lugares de dígitos desconocidos o descartados. Así, en el número 0,00263 las cifras significativas son 2, 6, 3; los ceros son usados únicamente para fijar el punto decimal, por lo que no son cifras significativas. En el número 3.809, todos los dígitos, incluyendo el cero, son cifras significativas. En un número como 46.300 no hay cómo describir cuáles ceros son cifras significativas. Para corregir la ambigüedad, este número puede ser escrito en cualquiera de las siguientes formas $\mathbf{4.63*10^4}$, $\mathbf{4.630*10^4}$ o $\mathbf{4{,}6300*10^4}$, así el número de cifras significativas está indicado por el factor a la izquierda (Scarborough, 1930).

MÉTODOS NUMÉRICOS

Existen problemas matemáticos que no pueden ser resueltos por los métodos analíticos conocidos. Por ello los autores se propusieron buscar métodos para hallar soluciones aproximadas, tratando de controlar el margen de error que aparece en la ejecución de los procesos utilizados.

El libro inicia con la teoría del error, basada en las sucesiones; continúa con la definición de las series de Taylor; la resolución de ecuaciones reales; muestra un algoritmo completo para hallar las raíces reales de un polinomio; se estudia el ajuste de curvas, empezando por el método de mínimos cuadrados hasta la interpolación; luego estudia la integración, centrada en los métodos Newton-Cotes y sus errores; finalmente, se utiliza el teorema de Taylor para la aproximación de la derivada.

El libro va dirigido a estudiantes de pregrado y posgrado de todas las ingenierías y ciencias básicas.

Colección: Ingeniería y salud en el trabajo
Área: Ingeniería

Incluye

- Definición alterna de "tolerancia".
- Algoritmo nuevo, bisección-regla falsa alternada, para hallar raíces de funciones.
- Algoritmo completo para aproximar las raíces reales de los polinomios.
- Herramienta de comparación entre mínimos cuadrados y linealización.

Solón Efrén Losada
Licenciado en Matemáticas, Magister en Economía, especialista en Multimedia educativa. Integrante del grupo de investigación MATRIX (U. Militar Nueva Granada).
Docente Universidad Militar Nueva Granada y Universidad Antonio Nariño, autor de los artículos *Una caracterización de la equivalencia-fila de matrices de tamaño 2 x 3, Cálculo de series armónicas de Riemann con exponente par,* entre otros.

Jorge Morales
Matemático, Magister en Ciencias Matemáticas y Doctorando en Ciencias Matemáticas. Docente de las universidades Militar Nueva Granada, Distrital Francisco José de Caldas y Nacional de Colombia. Autor de los artículos *Cálculo de series armónicas de Riemann con exponente par, Una caracterización de la equivalencia-fila de matrices de tamaño 2 x 3.*

Carlos Fabián Ruiz
Economista, Magister en Economía y Candidato a Magister en Investigación operativa y Estadística. Docente de la universidad Militar Nueva Granada y consultor privado en investigación de mercados.

ECOE EDICIONES

www.ecoeediciones.com

ISBN 978-958-771-514-9

9 789587 715149

e-ISBN 978-958-771-515-6